

Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik (MINT)

MINT-ProNeD: “Funktionaler Zusammenhang” – ein Fortbildungsmodul für die Sekundarstufe I

Zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ erhalten die Teilnehmenden Unterrichtsmaterialien und didaktische Anregungen zur digital gestützten Umsetzung in verschiedenen Klassenstufen der Sekundarstufe I. Es wird erarbeitet, wie Grundvorstellungen aufgebaut und zu erwartende Fehlvorstellungen diagnostiziert werden können. Im Mittelpunkt steht, wie der Unterricht an unterschiedliche Lernvoraussetzungen angepasst und das Mathematiklernen mit digitalen Werkzeugen themenspezifisch unterstützt werden kann. Ein zentrales Qualitätsmerkmal unserer Fortbildungen ist, dass sie forschungsbasiert sind und gemeinsam mit Lehrkräften und Fachberaterinnen und Fachberatern erprobt und weiterentwickelt wurden.

Autor:innen

Bogda, F., Heidelberg School of Education, PH Heidelberg | Özel, E., Heidelberg School of Education, PH Heidelberg | Vogel, M., Heidelberg School of Education, PH Heidelberg | Friesen, M., Heidelberg School of Education, PH Heidelberg

Produkttyp

Fortbildungen

Schulstufe

Sekundarstufe I



Dieses Produkt ist unter der Lizenz [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) veröffentlicht. Ausgenommene Inhalte sind an den einzelnen Inhalten angegeben. Die Urheber:innen sollen bei der Weiterverwendung wie folgt angegeben werden: Özel, E., Bogda, F., Friesen, M., Vogel, M., Kompetenzverbund lernendigital, entstanden im Projektverbund MINT-ProNeD.

INHALT

Baustein 1.....	1
Wippe im Gleichgewicht	2
Zusätzliche Inhalte: Wippe im Gleichgewicht	5
Aufgabenanalyse: Wippe im Gleichgewicht	6
Aspekte funktionalen Denkens (GV).....	8
Andockfragen: Wippe im Gleichgewicht	9
Rechtecksaufgabe.....	18
Baustein 2	22
Erprobungsauftrag	23
Diagnoseaufgabe „Der Flohmarkt“	24
Diagnoseaufgabe „Der König des Schreckens“	26
Diagnoseaufgabe „Wir peppen unser Klassenzimmer auf“	28
Vertiefungsaufgabe „Textlängen manipulieren“	29
Aufgabenanalyse „Textlängen manipulieren“	32
Baustein 3	35
Fortbildungsaktivität „Der König des Schreckens“	36
Fortbildungsaktivität „Wir peppen unser Klassenzimmer auf“	37
Fortbildungsaktivität „Der Flohmarkt“	38
Lernschritte beim Umgang mit Funktionen.....	39
Weitere Diagnoseinstrumente.....	46
Literatur	48

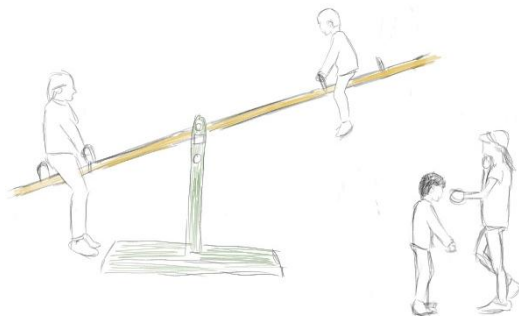
BAUSTEIN 1



Wippe im Gleichgewicht

Bringe die Wippe ins Gleichgewicht

Wippen kennst du bestimmt noch aus deiner Kindheit – ob mit Freunden, Geschwistern oder Eltern. Vielleicht hast du schon einmal bemerkt, dass deine Wipp-Partnerin bzw. dein Wipp-Partner schwerer oder leichter war als du? Um die Wippe auszubalancieren, musstet ihr dann eure Sitzposition verändern oder euch andere Kinder als Verstärkung mit dazu holen.



1. Die erwachsene Person links befindet sich fest an ihrer Position. Ihr seid die Person auf der rechten Seite der Wippe und sollt die **Wippe ins Gleichgewicht** bringen. Was könntet ihr tun, um die Wippe ins Gleichgewicht zu bringen? **Notiert mehrere Ideen.**

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



2. In einem **Experiment** soll die Situation modellhaft mit einer Rechenwaage (siehe Abbildung 1) nachgebaut werden: Um die linke Seite der Wippe mit der erwachsenen Person nachzubilden, werden links an der Position 9 der Rechenwaage vier Anhängengewichte (je 10g, insgesamt 40 Gramm) angehängt. Die Wippe ist nun im Ungleichgewicht.

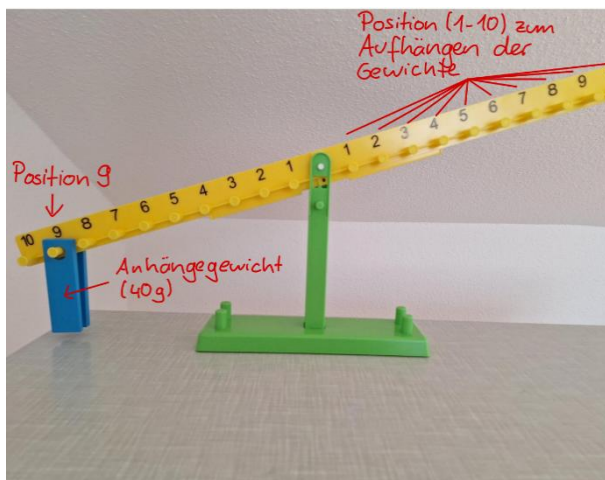


Abbildung 1

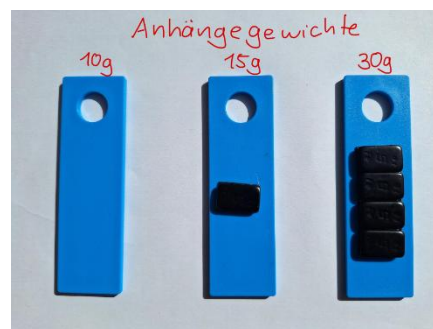


Abbildung 2

Für die **rechte Seite** habt ihr nun zwei Möglichkeiten:

- Die Person darf vor- oder zurückrutschen. Bei der Rechenwaage heißt das, man darf die Gewichte jeweils nur an eine Position (1 oder 2 oder 3 ... oder 10) hängen.
- Die Person kann schwerer oder leichter sein. Bei der Rechenwaage heißt das, man darf mehr oder weniger Anhängengewichte (siehe Abbildung 2) anhängen.

Probiert aus und findet alle Möglichkeiten die Rechenwaage ins Gleichgewicht zu bringen.

(Hinweis: Die Anhängengewichte haben nicht immer exakt das Gewicht wie ihr das in „Abbildung 2“ sehen könnt. Kleine Abweichungen beim Ausbalancieren sind daher in Ordnung und können als Gleichgewicht anerkannt werden)

Notiert eure Beobachtungsdaten (für alle Gleichgewichtssituationen) in folgender **Tabelle**:

Gewicht (in Gramm)									
Abstandsposition (1, 2, ..., 10)									

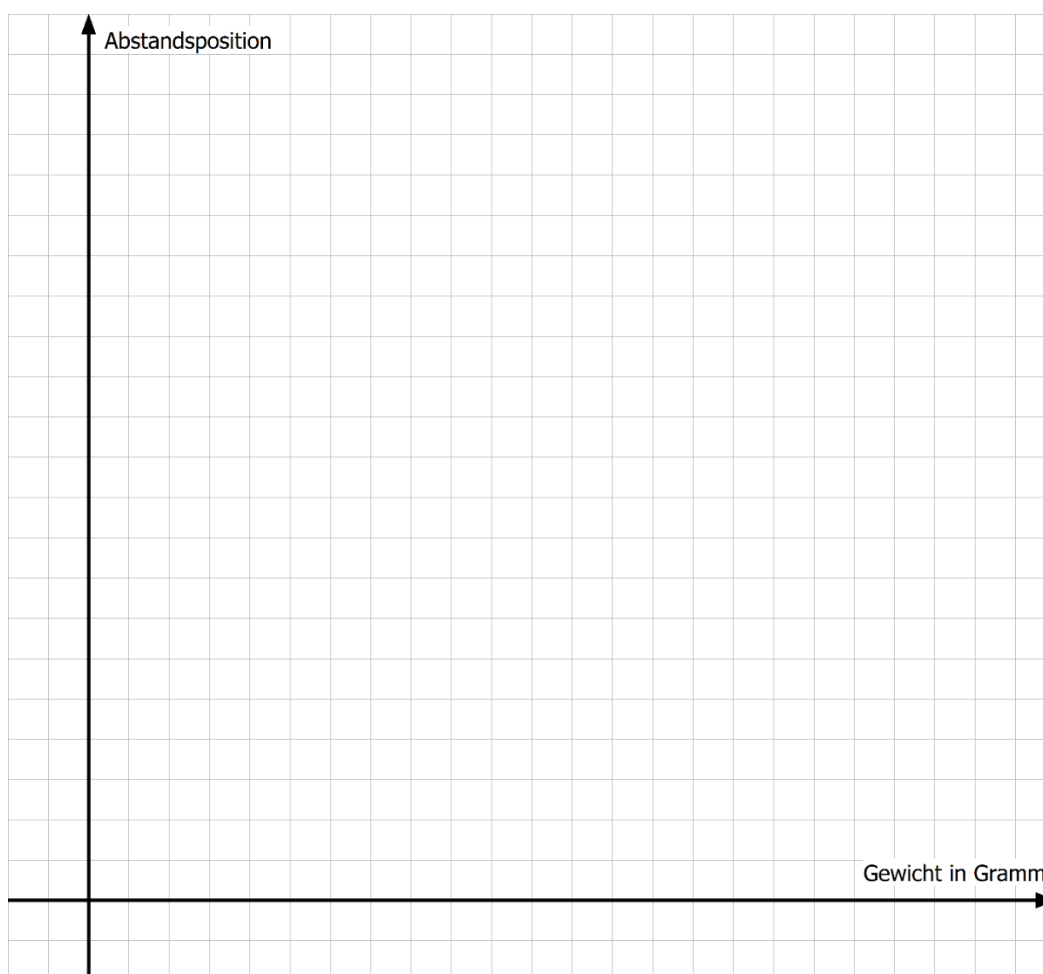


3. Ordnet gegebenenfalls die Werte aufsteigend nach dem Gewicht.



Gewicht (in Gramm)									
Abstandsposition (1, 2, ..., 10)									

Stellt die Tabelle im folgenden **Koordinatensystem** dar.



Begründet, ob es sich beim Zusammenhang „Gewicht und Abstandsposition“ um eine Funktion handelt?



4. **Beschreibt**, wie das Gewicht mit der Abstandsposition zusammenhängt. Vergleicht die Wertepaare miteinander. Erkennt ihr ein Muster (z. B. eine Gleichung)?



Zusätzliche Inhalte: Wippe im Gleichgewicht

Weiterarbeit in der Klasse mit der Geogebra-Umgebung durch die Lehrkraft



a. Liniendiagramm einer antiproportionalen Funktion

(LK bereitet das Punktdiagramm einer Gruppe in GeoGebra vor.)

Handelt es sich um eine Funktion? Begründe.

Wie lautet der Funktionsterm $d(m)$ für ein passendes mathematisches Modell?

(LK stellt die Gleichung um und visualisiert $d(m)$ als Liniendiagramm im gleichen Diagramm, in dem auch die Datenpunkte eingetragen sind)



b. Arbeiten mit dem mathematischen Modell einer antiproportionalen Funktion zur Beschreibung der Wippe mit dem Ziel des Austarierens

Berechnet für die fehlenden Abstandpositionen (d) die notwendigen Gewichte (m).

Beschreibt die Bedeutung der Punkte (im Liniendiagramm) zwischen den Wertepaaren aus der Tabelle für die Situation der Rechenwaage. (LK wählt in GeoGebra Punkte auf dem Graphen aus.)

Beschreibt die Veränderung des Gewichts, wenn sich die Abstandposition um 1 ändert. Was heißt diese Änderung für das Ausbalancieren der Wippe?



c. Vertiefung: Antiproportionale Funktion

Ist die Zuordnung $d \mapsto m$ ebenfalls eine Funktion? Begründe.

Wie lautet die Definitionsmenge und die Wertemenge, wenn

- die (antiproportionale) Funktion die Rechenwaage in einem Punktdiagramm beschreibt?
- die antiproportionale Funktion die Wippe in einem Liniendiagramm (Schaubild des Funktionsterms $m(d)$) beschreibt?
- eine antiproportionale Funktion, z. B. $f(x) = 360/x$, ganz allgemein betrachtet wird?

Aufgabenanalyse: Wippe im Gleichgewicht

(blau: Grundvorstellungen; rot: Phasen im Forscherkreislauf)

A.) Allgemein

Es sind keine spezifischen physikalischen Kenntnisse notwendig. Eigene Erfahrungen sind hilfreich, aber nicht notwendig, weil SuS durch das Experimentieren selbst die Erfahrungen sammeln können.

B.) Prozessbezogene Kompetenz der Modellierung

- Verstehen: SuS konstruieren ein mentales Modell zum gegebenen Problem die Wippe ins Gleichgewicht zu bringen **Forscherfrage/Vermutungen**
- Entwicklung eines Realmodells wird mehr oder weniger vorgegeben (Übersetzung der Realsituation: Wippe auf dem Spielplatz in ein Realmodell: Rechenwaage unter Einhaltung von Regeln ins Gleichgewicht bringen)
- Mathematisieren: Erstellung einer Tabelle mit Gewicht und Abstandsposition **Zuordnungsaspekt**, Erstellen eines Graphen mit den Punkten **Zuordnungsaspekt**, Erkennen eines Zusammenhangs in der sortierten Tabelle (Je größer das Gewicht, desto kleiner der Abstand) oder beim Graphen (Die Punkte fallen ab, am Anfang mehr und am Ende weniger) oder daran, dass Abstand * Position zahlenmäßig immer 360 ergibt. **Kovariation Daten sammeln/Daten untersuchen**
- Mathematische Modell: Antiproportionale Funktion in verschiedenen Darstellungen (z. B. auch $a=360/g$) **Objektaspekt Daten untersuchen/Austausch und Schlussfolgerung**
- Arbeiten mit dem mathematischen Modell (z.B. Vervollständigung der Tabelle) **Zuordnungsaspekt Austausch und Schlussfolgerung**

C.) weitere Potentiale (an was kann die Aufgabe anschließen?):

- Interpretieren: Welche Bedeutung im Rechenwaage-Experiment hat das Abnehmen der Steigung des Graphen? Was bedeutet das für die Wippen-Situation auf dem Spielplatz: Je weiter ich vom Drehpunkt weg sitze, desto weniger Gewicht muss ich zulegen, um ein Gleichgewicht herzustellen oder umgekehrt **Kovariation Austausch und Schlussfolgerung**
- Lösungsstrategien um die Rechenwaage ins Gleichgewicht zu bringen: systematisches Probieren (aufgrund diskreter Abstände und Gewichte sind nur wenige Wertepaare $[(180/2), (120/3), (90/4), (60/6), (45/8), (40/9)]$ möglich. Ggf. werden von SuS weitere Wertepaare ermöglicht und abgeschätzt, indem weitere Objekte als Gewichte generiert werden. **Zuordnungsaspekt Daten sammeln**
- Realmodell verändern, z. B. andere Ausgangssituation (auf der linken Seite der Wippe) und dann entsprechende mathematische Modelle aufstellen um damit Gleichgewichtssituationen auszurechnen und in der realen Welt abzugleichen (interpretieren) **Objektaspekt**
- oder umgekehrt: Mathematisches Modell (z. B. $f(x)=60/x$) vorgeben und dann ein reales Modell abzuleiten. **Objektaspekt**
- Auswirkungen von Parameter t in der Funktion $f(x)=t/x$ auf den Graphen **Kovariation Objektaspekt**
- Definitionsmenge und Wertemenge der Funktion (für das mathematische Modell $a=360/g$ sind nur diskrete positive Werte möglich. Für die allgemeine proportionale Funktion $f(x)=360/x$ sind alle reelle Werte mit Ausnahme der Null möglich) **Objektaspekt**
- Entscheiden, welche Größe abhängig und welche unabhängig ist: beide Richtungen sind möglich (Umkehrbarkeit der Funktion) **Zuordnungsaspekt**

- Verifizieren, ob es sich beim Zusammenhang um eine Funktion handelt: Gibt es für ein vorgegebenes Gewicht nur eine Abstandsposition?

[Zuordnungsaspekt/Objektaspekt](#)

D.) Inhaltsbezogenen Kompetenzen (G/M/E stehen für die Niveaustufen im Bildungsplan)

- Einfache Zusammenhänge zwischen (Zahlen[E]) und Größen (bei Alltagssituationen [E]) erkennen und beschreiben [Klasse 5/6]
- Zusammenhänge durch Tabellen, Gleichungen, Graphen oder Text darstellen [Klasse 7/8/9] und zwischen den Darstellungsformen (situationsgerecht [Klasse 7/8/9: M/E, bei G nur lineare Funktionen] wechseln [Klasse 10] *Mit mathematischen Darstellungen umgehen/Fächerverbindung zu Physik: Mechanik/Kinematik* [Klasse 7/8/9]
- Einfache funktionale Zusammenhänge in verbaler, tabellarischer und graphischer Form (auch im Koordinatensystem) darstellen und zwischen den Darstellungsformen wechseln [Klasse 5/6]
- Zu einer gegebenen (linearen [G]) eine Sachsituation angeben, die mithilfe dieser Funktion beschrieben werden kann [Klasse 7/8/9] *Mathematisch Modellieren*
- Punkte in Koordinatensystem eintragen und die Koordinaten von Punkten ablesen [Klasse 5/6]
- Alltagsbezogene Sachverhalte aus Darstellungen ablesen (z. B. größte und kleinste Werte, Zunehmen und Abnehmen, Zeitpunkte) [Klasse 7/8/9] *Mit mathematischen Darstellungen umgehen/Mit Medien mathematisch arbeiten*
- Proportionale und antiproportionale Zusammenhänge in konkreten Situationen erkennen und Sachprobleme durch proportionales oder antiproportionales Rechnen lösen, auch in Darstellungsform Dreisatz [Klasse 5/6: E] *Mathematisch Modellieren*
- Den dynamischen Zusammenhang zwischen Größen in einfachen Situationen anschaulich erläutern [Klasse 5/6: E]
- Funktionen als eindeutige Zuordnungen z. B. von x-Werten zu y-Werten, von nicht eindeutigen Zuordnungen unterscheiden [Klasse 7/8/9: E]
- Die Graphen der Potenzfunktionen f mit $f(x)=x^k$ ($k=-1,-2$) unter Verwendung charakteristischer Eigenschaften skizzieren [Klasse 10: E]
- Die Wirkung von Parametern in Funktionstermen von Potenz-Funktionen auf deren Graphen abbildungsgeometrisch deuten [Klasse 10: E]

E.) Digitale Werkzeuge:

Wippen-Simulationen: Verändern der Ausgangssituation und virtuelles Experiment (Ablauf wie beim realen Experiment) mit gleichzeitiger Darstellung von Tabelle, Graph und Situation und ggf. farblicher Markierung als Hilfestellung beim Darstellungswechsel

Aspekte funktionalen Denkens (GV)

Vollrath, 1989

Zuordnungsvorstellung

Jede Funktion ordnet dabei bestimmten x-Werten entsprechende y-Werte eindeutig zu. Durch diese Betrachtungsweise findet ein lokaler Blick auf einzelne Wertepaare statt, die durch die Funktion einander zugeordnet werden.

Kovariationsvorstellung

Der Blick geht über die lokale Betrachtung hinaus. Es werden nicht einzelne Wertepaare betrachtet, sondern die Beziehung zwischen verschiedenen Wertepaaren. Es wird betrachtet, wie sich die Funktionswerte (y-Werte) beim Durchlaufen der x-Werte miteinander verändern (kovariieren) bzw. welchen Verlauf eine Funktion in einem konkreten Bereich hat.

Objektvorstellung

Hier findet ein vollständig globaler Blick auf die (gesamte) Funktion statt. Der entsprechende Funktionsgraph bzw. der Funktionsterm wird als Ganzes in den Blick genommen. Auf diese Weise wird die Funktion selbst zu einem eigenständigen Objekt, für das seinerseits neue Operationen (z. B. das Addieren zweier Funktionen zu einer neuen) zur Verfügung stehen.

„Das Denken in Funktionen zeigt sich vor allem in der Fähigkeit, flexibel zwischen verschiedenen Darstellungsformen einer Funktion wechseln zu können.“

(2005, S. 20)

Barzel et al.

Andockfragen: Wippe im Gleichgewicht

Eine Zweier-Gruppe hat die Ausgangssituation der Wippe linksseitig verändert. Danach wurde die Wippe ins Gleichgewicht gebracht und die Daten in folgender Tabelle festgehalten:

Gewicht (in Gramm)											
Abstandsposition (1, 2, ..., 10)											

- a. Beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Gewicht (G) und der Abstandsposition (A).

Benutzt für Eure Beschreibung eines der folgenden Darstellungen:

- Baut die Situation an der Wippe nach
- Schreibt einen Text
- Vervollständigt die Tabelle
- Stellt eine Gleichung auf
- Erstellt ein Schaubild

Eine Zweier-Gruppe hat die Ausgangssituation der Wippe linksseitig verändert. Danach wurde die Wippe ins Gleichgewicht gebracht und die Daten in folgender Tabelle festgehalten:

Gewicht (in Gramm)											
Abstandsposition (1, 2, ..., 10)											

- b. Beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Gewicht (G) und der Abstandsposition (A).

Benutzt für Eure Beschreibung eines der folgenden Darstellungen:

- Baut die Situation an der Wippe nach
- Schreibt einen Text
- Vervollständigt die Tabelle
- Stellt eine Gleichung auf
- Erstellt ein Schaubild

Eine Zweier-Gruppe hat die Ausgangssituation der Wippe linksseitig verändert. Danach wurde die Wippe ins Gleichgewicht gebracht und die Daten in folgender Tabelle festgehalten:

Gewicht (in Gramm)											
Abstandsposition (1, 2, ..., 10)											

- c. Beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Gewicht (G) und der Abstandsposition (A).

Benutzt für Eure Beschreibung eines der folgenden Darstellungen:

- Baut die Situation an der Wippe nach
- Schreibt einen Text
- Vervollständigt die Tabelle
- Stellt eine Gleichung auf
- Erstellt ein Schaubild

Eine Zweier-Gruppe hat die Ausgangssituation der Wippe linksseitig verändert. Danach wurde die Wippe ins Gleichgewicht gebracht und die Daten in folgender Tabelle festgehalten:

Gewicht (in Gramm)											
Abstandsposition (1, 2, ..., 10)											

- d. Beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Gewicht (G) und der Abstandsposition (A).

Benutzt für Eure Beschreibung eines der folgenden Darstellungen:

- Baut die Situation an der Wippe nach
- Schreibt einen Text
- Vervollständigt die Tabelle
- Stellt eine Gleichung auf
- Erstellt ein Schaubild

Eine Zweier-Gruppe hat die Ausgangssituation der Wippe linksseitig verändert. Danach wurde die Wippe ins Gleichgewicht gebracht und die Daten in folgender Tabelle festgehalten:

Gewicht (in Gramm)											
Abstandsposition (1, 2, ..., 10)											

- e. Beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Gewicht (G) und der Abstandsposition (A).

Benutzt für Eure Beschreibung eines der folgenden Darstellungen:

- Baut die Situation an der Wippe nach
- Schreibt einen Text
- Vervollständigt die Tabelle
- Stellt eine Gleichung auf
- Erstellt ein Schaubild

Eine Zweier-Gruppe hat die Ausgangssituation der Wippe linksseitig verändert. Danach wurde die Wippe ins Gleichgewicht gebracht und die Daten in folgender Tabelle festgehalten:

Gewicht (in Gramm)											
Abstandsposition (1, 2, ..., 10)											

- f. Beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Gewicht (G) und der Abstandsposition (A).

Benutzt für Eure Beschreibung eines der folgenden Darstellungen:

- Baut die Situation an der Wippe nach
- Schreibt einen Text
- Vervollständigt die Tabelle
- Stellt eine Gleichung auf
- Erstellt ein Schaubild

Bisher hattet ihr den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ untersucht. Nun werden die Größen Gewicht und Abstandsposition vertauscht: „Abstandsposition \rightarrow Gewicht“

- a. Begründet, ob es sich hierbei ebenfalls um eine Funktion handelt.
- b. Welche Änderungen zu „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ ergeben sich dadurch im Schaubild der Funktion. Beschreibt diese.

Bisher hattet ihr den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ untersucht. Nun werden die Größen Gewicht und Abstandsposition vertauscht: „Abstandsposition \rightarrow Gewicht“

- a. Begründet, ob es sich hierbei ebenfalls um eine Funktion handelt.
- b. Welche Änderungen zu „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ ergeben sich dadurch im Schaubild der Funktion. Beschreibt diese.

Bisher hattet ihr den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ untersucht. Nun werden die Größen Gewicht und Abstandsposition vertauscht: „Abstandsposition \rightarrow Gewicht“

- a. Begründet, ob es sich hierbei ebenfalls um eine Funktion handelt.
- b. Welche Änderungen zu „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ ergeben sich dadurch im Schaubild der Funktion. Beschreibt diese.

Bisher hattet ihr den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ untersucht. Nun werden die Größen Gewicht und Abstandsposition vertauscht: „Abstandsposition \rightarrow Gewicht“

- a. Begründet, ob es sich hierbei ebenfalls um eine Funktion handelt.
- b. Welche Änderungen zu „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ ergeben sich dadurch im Schaubild der Funktion. Beschreibt diese.

Bisher hattet ihr den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ untersucht. Nun werden die Größen Gewicht und Abstandsposition vertauscht: „Abstandsposition \rightarrow Gewicht“

- a. Begründet, ob es sich hierbei ebenfalls um eine Funktion handelt.
- b. Welche Änderungen zu „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ ergeben sich dadurch im Schaubild der Funktion. Beschreibt diese.

Bisher hattet ihr den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ untersucht. Nun werden die Größen Gewicht und Abstandsposition vertauscht: „Abstandsposition \rightarrow Gewicht“

- a. Begründet, ob es sich hierbei ebenfalls um eine Funktion handelt.
- b. Welche Änderungen zu „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ ergeben sich dadurch im Schaubild der Funktion. Beschreibt diese.

Untersucht den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ auf folgende Eigenschaften:

- a. Wie lauten Definitionsmenge und Wertemenge.
- b. Vervollständigt die Sätze, sodass die Aussage wahr ist:
 - Je größer das Gewicht, desto _____ die Abstandsposition
 - Wird die Abstandsposition verdoppelt, so muss sich das Gewicht _____.
 - Je kleiner die Abstandsposition der Person, desto _____ muss deren Gewicht sein um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen.

Untersucht den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ auf folgende Eigenschaften:

- a. Wie lauten Definitionsmenge und Wertemenge.
- b. Vervollständigt die Sätze, sodass die Aussage wahr ist:
 - Je größer das Gewicht, desto _____ die Abstandsposition.
 - Wird die Abstandsposition verdoppelt, so muss sich das Gewicht _____.
 - Je kleiner die Abstandsposition der Person, desto _____ muss deren Gewicht sein um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen.

Untersucht den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ auf folgende Eigenschaften:

- a. Wie lauten Definitionsmenge und Wertemenge.
- b. Vervollständigt die Sätze, sodass die Aussage wahr ist:
 - Je größer das Gewicht, desto _____ die Abstandsposition.
 - Wird die Abstandsposition verdoppelt, so muss sich das Gewicht _____.
 - Je kleiner die Abstandsposition der Person, desto _____ muss deren Gewicht sein um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen.

Untersucht den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ auf folgende Eigenschaften:

- a. Wie lauten Definitionsmenge und Wertemenge.
- b. Vervollständigt die Sätze, sodass die Aussage wahr ist:
 - Je größer das Gewicht, desto _____ die Abstandsposition.
 - Wird die Abstandsposition verdoppelt, so muss sich das Gewicht _____.
 - Je kleiner die Abstandsposition der Person, desto _____ muss deren Gewicht sein um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen.

Untersucht den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ auf folgende Eigenschaften:

- a. Wie lauten Definitionsmenge und Wertemenge.
- b. Vervollständigt die Sätze, sodass die Aussage wahr ist:
 - Je größer das Gewicht, desto _____ die Abstandsposition.
 - Wird die Abstandsposition verdoppelt, so muss sich das Gewicht _____.
 - Je kleiner die Abstandsposition der Person, desto _____ muss deren Gewicht sein um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen.

Untersucht den Zusammenhang „Gewicht \rightarrow Abstandsposition“ auf folgende Eigenschaften:

- a. Wie lauten Definitionsmenge und Wertemenge.
- b. Vervollständigt die Sätze, sodass die Aussage wahr ist:
 - Je größer das Gewicht, desto _____ die Abstandsposition.
 - Wird die Abstandsposition verdoppelt, so muss sich das Gewicht _____.
 - Je kleiner die Abstandsposition der Person, desto _____ muss deren Gewicht sein um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen.

Gegeben ist die Gleichung $y * x = 60$.

- a. Erfindet zur Gleichung eine mögliche (sinnvolle) reale Situation (nicht die Wippe 😊). Beschreibt diese Situation in einer weiteren Darstellung eurer Wahl.
- b. Bildet daraus eine Funktionsgleichung. Gebt Definitionsmenge und Wertemenge an.

Gegeben ist die Gleichung $y * x = 60$.

- a. Erfindet zur Gleichung eine mögliche (sinnvolle) reale Situation (nicht die Wippe 😊). Beschreibt diese Situation in einer weiteren Darstellung eurer Wahl.
- b. Bildet daraus eine Funktionsgleichung. Gebt Definitionsmenge und Wertemenge an.

Gegeben ist die Gleichung $y * x = 60$.

- a. Erfindet zur Gleichung eine mögliche (sinnvolle) reale Situation (nicht die Wippe 😊). Beschreibt diese Situation in einer weiteren Darstellung eurer Wahl.
- b. Bildet daraus eine Funktionsgleichung. Gebt Definitionsmenge und Wertemenge an.

Gegeben ist die Gleichung $y * x = 60$.

- a. Erfindet zur Gleichung eine mögliche (sinnvolle) reale Situation (nicht die Wippe 😊). Beschreibt diese Situation in einer weiteren Darstellung eurer Wahl.
- b. Bildet daraus eine Funktionsgleichung. Gebt Definitionsmenge und Wertemenge an.

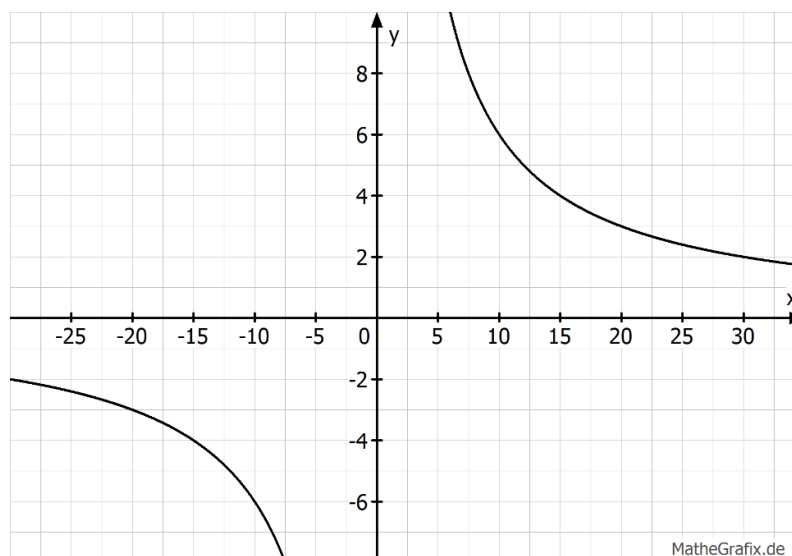
Gegeben ist die Gleichung $y * x = 60$.

- a. Erfindet zur Gleichung eine mögliche (sinnvolle) reale Situation (nicht die Wippe 😊). Beschreibt diese Situation in einer weiteren Darstellung eurer Wahl.
- b. Bildet daraus eine Funktionsgleichung. Gebt Definitionsmenge und Wertemenge an.

Gegeben ist die Gleichung $y * x = 60$.

- a. Erfindet zur Gleichung eine mögliche (sinnvolle) reale Situation (nicht die Wippe 😊). Beschreibt diese Situation in einer weiteren Darstellung eurer Wahl.
- b. Bildet daraus eine Funktionsgleichung. Gebt Definitionsmenge und Wertemenge an.

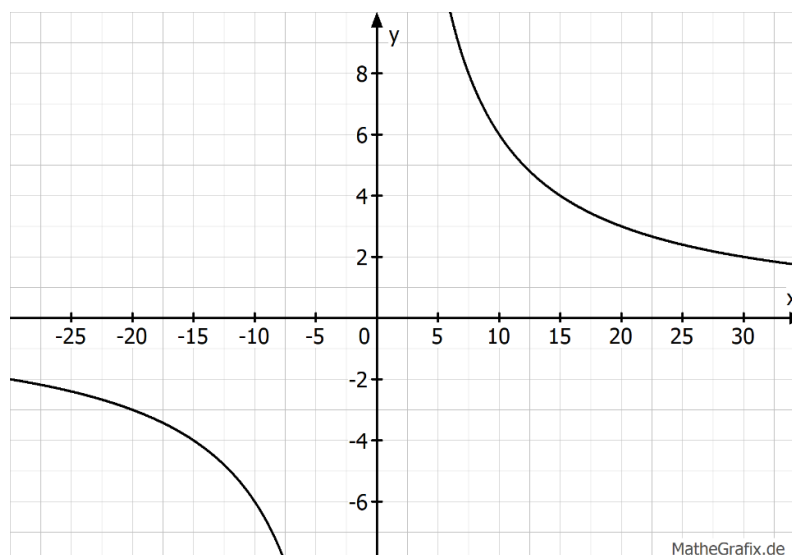
Marie hat die Wippe für die Gleichung $y * x = 60$ nachgestellt. Danach gibt sie in einem Funktionenplotter die Gleichung ein. Ihr wird folgendes Schaubild dargestellt:



Sie sagt: „Das sieht ja ganz anders aus als beim Wippenexperiment. Das sind ja erstens gar keine Punkte mehr zusehen, sondern nur Kurven. Zweitens ist auf einmal im Minusbereich eine Kurve aufgetaucht. Die gab es bei der Wippe auch noch nicht. Ich verstehe das nicht!

Kannst du Marie helfen das Schaubild zu verstehen?

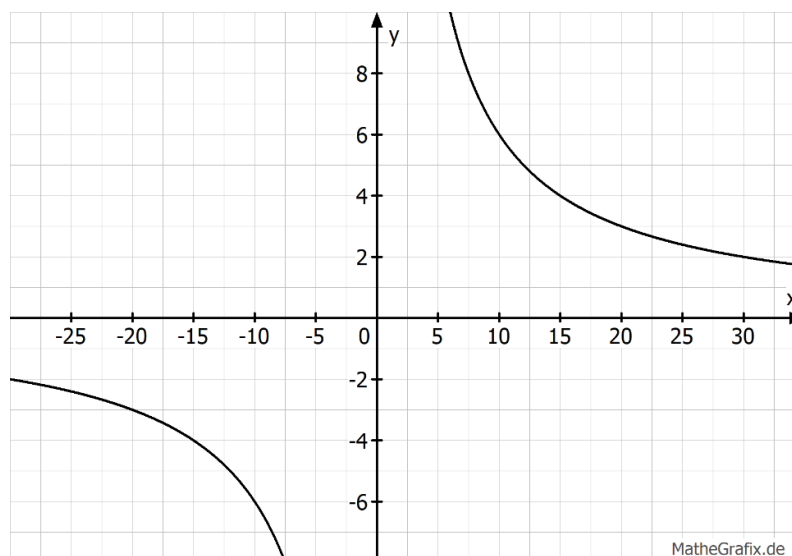
Marie hat die Wippe für die Gleichung $y * x = 60$ nachgestellt. Danach gibt sie in einem Funktionenplotter die Gleichung ein. Ihr wird folgendes Schaubild dargestellt:



Sie sagt: „Das sieht ja ganz anders aus als beim Wippenexperiment. Das sind ja erstens gar keine Punkte mehr zusehen, sondern nur Kurven. Zweitens ist auf einmal im Minusbereich eine Kurve aufgetaucht. Die gab es bei der Wippe auch noch nicht. Ich verstehe das nicht!

Kannst du Marie helfen das Schaubild zu verstehen?

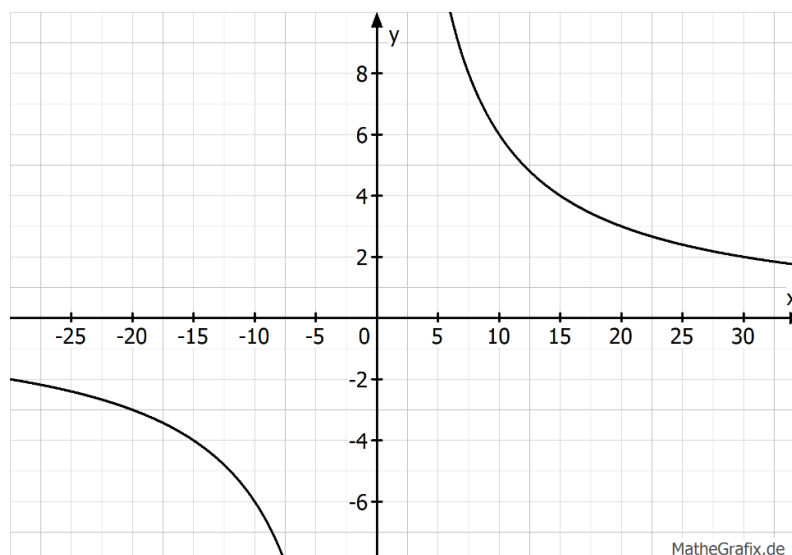
Marie hat die Wippe für die Gleichung $y * x = 60$ nachgestellt. Danach gibt sie in einem Funktionenplotter die Gleichung ein. Ihr wird folgendes Schaubild dargestellt:



Sie sagt: „Das sieht ja ganz anders aus als beim Wippenexperiment. Das sind ja erstens gar keine Punkte mehr zusehen, sondern nur Kurven. Zweitens ist auf einmal im Minusbereich eine Kurve aufgetaucht. Die gab es bei der Wippe auch noch nicht. Ich verstehe das nicht!“

Kannst du Marie helfen das Schaubild zu verstehen?

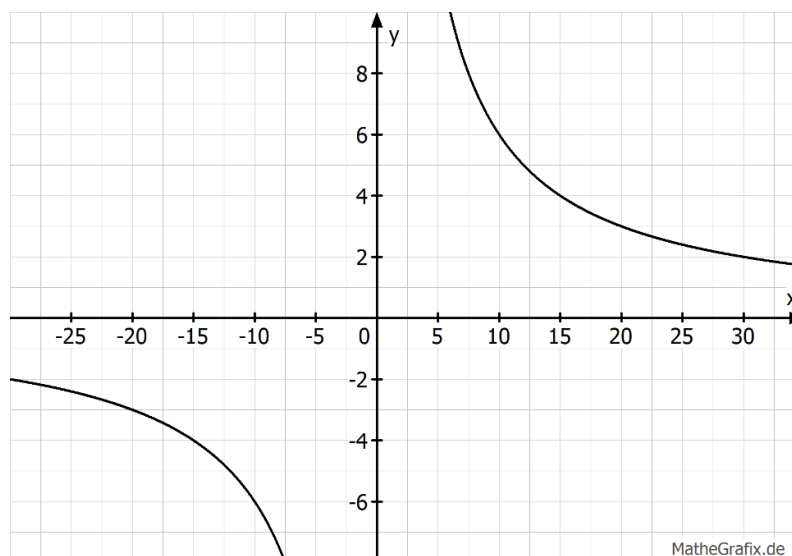
Marie hat die Wippe für die Gleichung $y * x = 60$ nachgestellt. Danach gibt sie in einem Funktionenplotter die Gleichung ein. Ihr wird folgendes Schaubild dargestellt:



Sie sagt: „Das sieht ja ganz anders aus als beim Wippenexperiment. Das sind ja erstens gar keine Punkte mehr zusehen, sondern nur Kurven. Zweitens ist auf einmal im Minusbereich eine Kurve aufgetaucht. Die gab es bei der Wippe auch noch nicht. Ich verstehe das nicht!“

Kannst du Marie helfen das Schaubild zu verstehen?

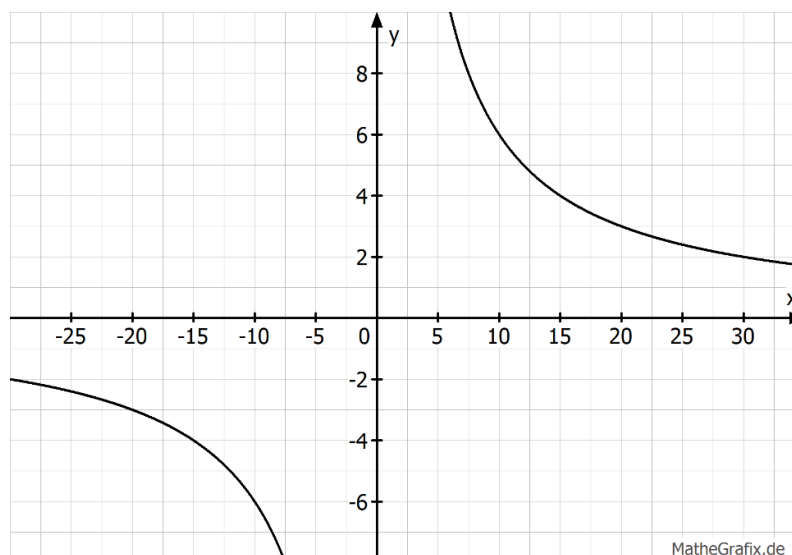
Marie hat die Wippe für die Gleichung $y * x = 60$ nachgestellt. Danach gibt sie in einem Funktionenplotter die Gleichung ein. Ihr wird folgendes Schaubild dargestellt:



Sie sagt: „Das sieht ja ganz anders aus als beim Wippenexperiment. Das sind ja erstens gar keine Punkte mehr zusehen, sondern nur Kurven. Zweitens ist auf einmal im Minusbereich eine Kurve aufgetaucht. Die gab es bei der Wippe auch noch nicht. Ich verstehe das nicht!“

Kannst du Marie helfen das Schaubild zu verstehen?

Marie hat die Wippe für die Gleichung $y * x = 60$ nachgestellt. Danach gibt sie in einem Funktionenplotter die Gleichung ein. Ihr wird folgendes Schaubild dargestellt:



Sie sagt: „Das sieht ja ganz anders aus als beim Wippenexperiment. Das sind ja erstens gar keine Punkte mehr zusehen, sondern nur Kurven. Zweitens ist auf einmal im Minusbereich eine Kurve aufgetaucht. Die gab es bei der Wippe auch noch nicht. Ich verstehe das nicht!“

Kannst du Marie helfen das Schaubild zu verstehen?

Rechtecksaufgabe

Wir erforschen Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken

(nach Jahnke & Wambach, 2013)



Wie verändert sich die Seite b eines Rechtecks in Abhängigkeit von Seite a , wenn der Flächeninhalt A konstant bleibt?



1. Meine Vermutung und Begründung:





2. Im Umschlag befinden sich 32 Quadrate. Die Breite und Länge eines Quadrats betragen jeweils 1 LE.



Finde alle möglichen Rechtecke, die du mit den Quadraten legen kannst und beschreibe dein Vorgehen.

[illegible]

Hilfsmittel:

Flächeninhalt A: 32 LE^2

Unabhängige Variable: _____								
Abhängige Variable: _____								



3. Wie verändert sich die Seitenlänge b in Abhängigkeit von der Seitenlänge a ? Was fällt dir auf? Beschreibe deine Entdeckungen.
(z. B.: Wenn a ..., dann ...)



4. Vergleiche deine Entdeckungen mit den Entdeckungen deiner Nebensitzerin / deines Nebensitzers. Ergänze gegebenenfalls deine Entdeckungen (Aufgabe 3).



5. Startet folgende App.

<https://ddihd.github.io/webapps/Mathematik/Rechteck/index.html>



Legt einen beliebigen Flächeninhalt A fest. Konstruiert verschiedene Rechtecke und notiert die Seitenlängen dieser in folgender Tabelle:

Flächeninhalt A: _____

Unabhängige Variable: _____								
Abhängige Variable: _____								

Flächeninhalt A: _____

Unabhängige Variable: _____								
Abhängige Variable: _____								



6. Untersucht, ob eure Entdeckungen von 3. und 4. auch für andere Rechtecke (Aufgabe 5) gelten.



7. Formuliert eine allgemeingültige Regel, die bei konstantem Flächeninhalt A den Zusammenhang zwischen den Seitenlängen a und b eines Rechtecks beschreibt.



(Hilfswörter: abhängige Variable, unabhängige Variable, Wenn a..., dann b..., Wenn ..., dann steigt ... pro ... um ..., Wenn ..., dann fällt / wächst ... um ...)

Wir erforschen Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken

(nach Jahnke & Wambach, 2013)



Wie verändert sich der Flächeninhalt A in Abhängigkeit von der Seitenlänge a , wenn die Seitenlänge b konstant bleibt?

Wir erforschen Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken

(nach Jahnke & Wambach, 2013)



Wie verändert sich der Umfang u in Abhängigkeit von der Seitenlänge a , wenn die Seitenlänge b konstant bleibt?

Wir erforschen Flächeninhalt und Umfang von Rechtecken

(nach Jahnke & Wambach, 2013)



Wie verändert sich der Flächeninhalt A in Abhängigkeit von der Seitenlänge a , wenn der Umfang u konstant bleibt?

BAUSTEIN 2



Erprobungsauftrag

Durchführung von Diagnoseaufgaben zur „Leitidee Funktionaler Zusammenhang“

Durch diagnostische Aufgaben Rückschlüsse auf die Denkprozesse Ihrer Schülerinnen und Schüler ziehen

Um unterrichtliche Aktivitäten an den individuellen Lernvoraussetzungen der einzelnen Schülerinnen und Schüler zu orientieren, ist es notwendig, Einsicht in deren Denkweisen zu gewinnen. Solche Denkweisen (z. B. Fehlvorstellungen) sind der unmittelbaren Wahrnehmung einer Lehrkraft nicht zugänglich und müssen rekonstruktiv zum Beispiel aus Aufgabenbearbeitungen erschlossen werden (vgl. Loibl et al., 2020; Prediger & Wittmann, 2009).

Die Aufgaben der Kategorie Baustein 3 „Diagnose von Denkweisen“ wurden so konstruiert, dass die daraus hervorgehenden Aufgabenbearbeitungen Ihrer Schülerinnen und Schüler Hinweise auf ihre Denkprozesse enthalten und dadurch Fehlvorstellungen aufdecken können.

Diagnoseauftrag für die asynchrone Phase

Führen Sie mit Ihren Schülerinnen und Schülern bis zur nächsten Sitzung (oder ...) mindestens eine Diagnoseaufgabe durch. Dokumentieren Sie Ihre Erprobung für die anderen Teilnehmenden.

Vor der Erprobung – Gelingensfaktoren

Wählen Sie mindestens eine Diagnoseaufgabe (Baustein 3) aus.

1. Lesen Sie die Übersicht zur Zielsetzung dieser Aufgabe durch (Warum setze ich die Aufgabe überhaupt ein?).
2. Welche Lösungen erwarten Sie von Ihren Schülerinnen und Schülern? Schreiben Sie die wichtigsten Impulsfragen auf.
3. Welche Unterstützung (z. B. in Form von Hilfskarten) möchten Sie Ihren Schülerinnen und Schülern anbieten?

Während der Erprobung

Machen Sie Fotos oder Scans von Bearbeitungen ihrer Schülerinnen und Schüler. Diese können Sie im Plenumsgespräch als Gesprächsgrundlage an die Tafel projizieren.

Schreiben Sie drei bis vier (schöne, interessante) Gesprächsmomente auf – so wörtlich wie möglich. Diese können Vermutungen sein, die Fehlvorstellungen aufdecken, Aha-Erlebnisse im Plenumsgespräch (Die Ergebnisse anderer Schülerinnen und Schüler unterscheiden sich von meinen Ergebnissen. Warum?), Herausforderungen, Überforderungen oder Stolpersteine.

Nach der Erprobung

1. Wählen Sie zwei interessante Bearbeitungen Ihrer Schülerinnen und Schüler aus und kommentieren Sie in zwei Sätzen, was daran für Sie didaktisch interessant war.
2. Wählen Sie einen schönen Gesprächsmoment aus und kommentieren Sie in zwei Sätzen, was daran für Sie didaktisch interessant war.

Diagnoseaufgabe „Der Flohmarkt“

Der Flohmarkt

Kempen & Zindel, 2022

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung ordnet jedem Gewinn die Anzahl der Bücher zu, die er dafür verkaufen müsste:

$$f(x) = 0,5x + 2,5$$

Arbeitsaufträge

1. Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?
Schreibe deine Rechnung auf und begründe sie.

2. Welchen Gewinn macht Max, wenn er 12 Bücher verkauft?

3. Wofür stehen x und $f(x)$?

4. Welche Größe ist abhängig von welcher Größe?

Unabhängige Größe:

Abhängige Größe:

Diagnoseaufgabe „Der König des Schreckens“

Der König des Schreckens

nach Hofmann & Roth, 2021



Zeichnung: Elif Özel

Im Vergnügungspark MINTasia sorgt die Achterbahn bei den Gästen für Kribbeln im Bauch. Während zu Beginn der Achterbahnfahrt der **Aufstieg** harmlos scheint, sorgt die anschließende **Schlucht** (d.h. hier geht es erst steil runter und dann gleich wieder hoch) für Herzrasen. Der Schlucht folgt ein **Looping** (der Wagen fährt eine 360-Grad-Schleife - man befindet sich an der Spitze über Kopf) – der König des Schreckens! Eine **Spirale abwärts** (keine Kopfüberfahrt) schließt die Runde ab, noch während der Puls der Gäste an der Decke tanzt.



1. Stellt euch vor, ihr steht vor der oben beschriebenen Achterbahn. Fertigt eine Skizze dieser Achterbahn an (wie wenn ihr ein Foto von der Achterbahn machen würdet).



Wie ist die Achterbahn konstruiert? Bestimmt die

- Höhe und Tiefe der Achterbahnfiguren,
- Abstände zwischen den Achterbahnfiguren,
- ...



und notiert diese an der entsprechenden Stelle in der Skizze.

Skizze der Achterbahnkonstruktion

2. Zeichnet passend zu eurer Skizze einen Graphen, welche der gefahrenen Strecke des Wagens jeweils die Höhe des Wagens auf der Achterbahn zuordnet.

- 3.** Erstellt mit Hilfe eurer Skizze ein Höhenprofil für die gefahrene Strecke des Wagens auf der Achterbahn. Überlegt euch hierfür eine passende Skalierung und tragt die in Aufgabe 1 genannten Höhen in das Koordinatensystem ein.



- 4.** Vergleiche deinen Graphen mit dem Graphen einer Person aus deiner Gruppe. Erkläre ihm bzw. ihr, was du dir bei der Zeichnung (Konstruktion des Graphen) gedacht hast. 
- 5.** Diskutiert die Gemeinsamkeiten und Unterschiede eurer Graphen und notiert diese. 

Gemeinsamkeiten:

Unterschiede:

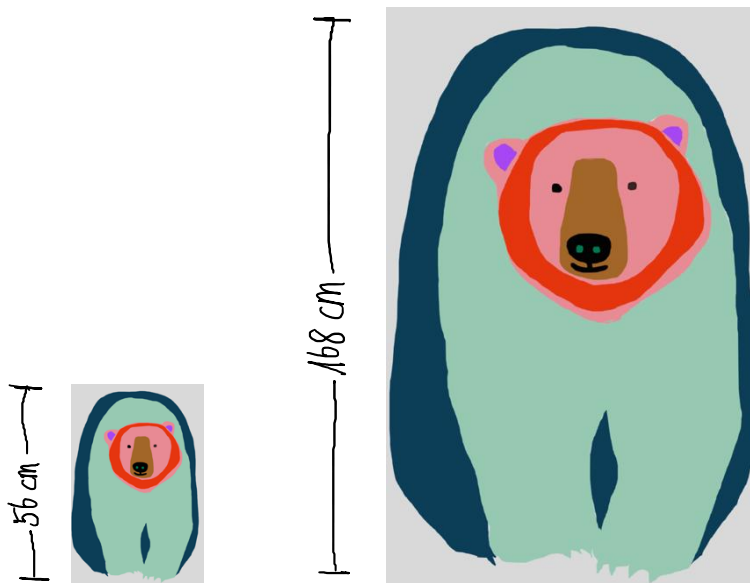
Diagnoseaufgabe „Wir peppen unser Klassenzimmer auf“

Pimp your classroom

nach De Bock et al., 2002

Schülerinnen und Schüler der Klasse 7b möchten die Wände ihres Klassenzimmers aufpeppen. Sie haben sich entschieden, einen Bären an die Wand zu malen.

Damit nichts schiefgeht, haben sie zuvor eine 56 cm große Skizze angefertigt. Dafür haben sie 80 ml Farbe benötigt. Da ihnen die Skizze gefällt, sind sie bereit, eine vergrößerte Version der Skizze an die Wand zu malen. Das Wandbild soll 168 cm hoch sein.



Arbeitsauftrag

Wie viel Liter Farbe werden die Schülerinnen und Schüler der Klasse 7b für das Wandbild ungefähr brauchen? Begründe deine Antwort.

Vertiefungsaufgabe „Textlängen manipulieren“

Textlängen manipulieren - Schriftgröße und Textlänge

nach Schreiter & Vogel, 2021

Stellt euch vor, ihr seid wieder mal zeitlich knapp dran und müsst euren geschriebenen Text auf eine vorgegebene Mindestgröße bringen. Da fällt euch ein, dass ihr mit den verschiedenen Funktionen eures Textverarbeitungsprogramms (z. B. MS Word oder Pages) experimentieren könnt. Ihr wisst natürlich, dass die Schriftgröße die Textlänge beeinflussen kann – kleinere Schrift macht den Text kürzer, größere länger.

Was nutzt es mir, wenn ich die Schrift größer mache, z. B. doppelt, dreifach, ... so groß? Wie beeinflusst die Schriftgröße die Textlänge genau?



1. Öffnet ein Textverarbeitungsprogramm (MS Word oder Pages). Kopiert einen kurzen Text (ca. ¼ Seite) hinein. Um Vermutungen über den Zusammenhang zwischen Schriftgröße und Textlänge (siehe dazu Abbildung 1) aufzustellen, vergrößert bzw. verkleinert die Schriftgröße dynamisch und beobachtet die Auswirkungen auf den Text (insbesondere auf die Textlänge).

Stellt Vermutungen über den Zusammenhang zwischen Schriftgröße und Textlänge auf und begründet diese. ● ●




Aurea prima sata est aetas, quae vindice nullo, sponte sua, sine lege fidem rectumque colebat. Poena metusque aberant, nec verba minantia fixo aere legebantur, nec supplex turba timebat iudicis oro sui, sed erant sine vindice tuti. Nondum caesa suis, peregrinum ut viseret orbem, montibus in liquidas pinus descenderat undas, nullaque mortales praeter sua litora norant; nondum praecipites cingebant oppida fossae; non tuba directi, non aeris cornua flexi, non galeae, non ensis erat: sine militis usu mollia securae peragebant otia gentes.

Textlänge

Abbildung 1: Messen der Textlänge

[illegible]



2. Damit ihr später in der Klasse besser über eure Ergebnisse sprechen könnt und keiner vom Inhalt abgelenkt wird, arbeiten alle mit dem gleichen lateinischen Text: 

Aurea prima sata est aetas, quae vindice nullo, sponte sua, sine lege fidem rectumque colebat. Poena metusque aberant, nec verba minantia fixo aere legebantur, nec supplex turba timebat iudicis ora sui, sed erant sine vindice tuti. Nondum caesa suis, peregrinum ut viseret orbem, montibus in liquidas pinus descenderat undas, nullaue mortales praeter sua litora norant, nondum praecipites cingebant oppida fossae; non tuba directi, non aeris cornua flexi, non galeae, non ensis erat: sine militis usu mollia securae peragebant otia gentes.


Quelle: Ovid-Metamorphosen: Die vier Zeitalter (89–100)

Öffnet die Datei „Experimentiervorlage Textlänge“ mit einem Textverarbeitungsprogramm (z. B. MS Word oder Pages). Hier seht ihr den Text mit einem Rahmen versehen.


Messt für jede Schriftgröße die Textlänge und notiert eure Daten in folgende Tabelle. Die Textlänge könnt ihr über die die Höhe des Textrahmens näherungsweise bestimmen. (Schriftart und Textbreite bleiben gleich!)

Schriftgröße (in pt)									
Textlänge (in mm)									



3. Begründet, ob es sich beim Zusammenhang „Schriftgröße und Textlänge“ um eine Funktion handelt? 



4. Startet die Datenanalyseplattform „CODAP“ über folgenden Link:  <https://codap.concord.org/app/static/dg/de/cert/index.html>
Öffnet die Lokale Datei „Textlänge SuS“, überträgt Eure Messtabelle nach CODAP und passt die Daten mit den vorgeschlagenen Funktionen (a. bis c.) an.

- a. Vanessa sagt, dass eine Gerade geeignet sei um die Datenpunkte anzunähern, weil bisher vieles mit Geraden beschrieben wurde und die Textlänge schließlich zunimmt, wenn die Schriftgröße größer wird.
- b. Max entgegnet Vanessa und sagt, dass eine Gerade als Annäherung der Datenpunkte nur dann Sinn macht, wenn diese durch den Ursprung verläuft. Grund sei, dass bei einer Schriftgröße von 0 pt kein Text sichtbar wäre und dies einer Textlänge von 0 mm entspräche.
- c. Paul schlägt eine Parabel als Annäherung vor, weil sich die Datenpunkte immer mehr nach oben krümmen.



5. Prüft jeweils die Funktionen auf ihre Eignung zur Beschreibung der realen Situation. Folgende Leitfragen helfen euch dabei:
- Wie gut beschreibt die Funktion die gemessenen Werte von Schriftgröße und der Textlänge?
 - Wie gut eignet sich die Funktion um den tatsächlichen Zusammenhang zu beschreiben?
 - Inwieweit kann das Modell die Forscherfrage beantworten?
 - Eignet sich das Modell, um Textlängen bei nicht gemessenen Schriftgrößen vorherzusagen?
6. Optional: Überlegt euch weitere mathematische Funktionen und prüft diese auf ihre Eignung.



7. **Ergänzungen für die Lehrkraft:**



- a. **„Residuenplot“ als Entscheidungshilfe** bei der mathematischen Modellierung (siehe Exceldatei „Textlänge Excel LuL“)



- b. **Datenfit vs. Kontextfit**

Ihr habt insgesamt x -Wertepaare gemessen. Eine Polynomfunktion $(x-1)$ -Grades erfasst immer alle x -Datenpunkte. Somit gäbe es keine Residuen mehr (d.h. der Residuenplot wäre eine konstante „Nullfunktion“). Diese mathematische Funktion wäre dann der perfekte Datenfit. Bestimmt für Eure Messwerte diesen perfekten Datenfit. Ist der perfekte Datenfit auch das perfekte Modell? Warum (nicht)?

- c. **Mögliche weitere Forscherfrage**

Bei gleichbleibender Schriftgröße kann eine Verlängerung der Textlänge durch die Verkleinerung der Textbreite erreicht werden. Untersucht diesen Zusammenhang. (Diskussion: Exponentiell oder Antiproportional?)

Aufgabenanalyse „Textlängen manipulieren“

Fachdidaktik:

SuS ab Ende des SEK1 kennen die Situation, Ausarbeitungen mit einer bestimmten Seitenzahl abgeben zu müssen und sind bereits bewusst oder unbewusst auf das Phänomen „Zusammenhang von Schriftgröße und Textlänge“ gestoßen.

Schwerpunkt: **Modellieren von Daten** mit bekannten mathematischen Funktionen: Dabei wird besonders der **Kovariationsaspekt** im (bivariaten) Datensatz in den Fokus genommen und mithilfe digitaler Werkzeuge ausgewertet (Regression mit Schieberegler und Residuenplot). Als anleitende Struktur eignet sich hierbei hervorragend der **Forscher-Kreislauf** (angelehnt an den PPDAC-Zyklus von Wild & Pfannkuch, 1999):

- **Forscherfrage/Vermutungen äußern:** Problem wird fokussiert, indem Schriftgröße und Textlänge als (offensichtlich) voneinander abhängige Größen betrachtet werden. Die Forscherfrage intendiert weniger die genauen Wirkmechanismen wie die Abhängigkeit (theoretisch) erklärt werden kann. Vielmehr regt diese die SuS an, durch systematisches Probieren und Beobachten Vermutungen zu äußern. Das (Vor-)Experiment mit der Veränderung der Schriftgröße und dem Mitverändern der Textlänge (**Kovariationsaspekt**) ermöglichen den SuS ein dynamisches Miterleben des Zusammenhangs (SuS schlüpfen sozusagen in die Funktion). Sie könnten dabei feststellen, dass theoretische Erklärungsversuche (Ausdehnung eines Buchstabens in zwei Dimensionen → Quadratischer Zusammenhang) nicht vollständig ausreichen, um den Vorgang/Zusammenhang vollends zu erfassen (Zeilenumbrüche, ...). Zudem können die SuS durch die freie Textwahl die Erfahrung machen, dass die Art der Schriftzeichen unerheblich ist. Gleichzeitig erkennen Sie aber, dass es für das folgende Experiment sinnvoll ist, die Textpassage gleich zu lassen (Anzahl der Schriftzeichen bleibt konstant, d. h. alle arbeiten mit der gleichen Textpassage).
- **Daten sammeln:** Es ist notwendig, Daten zu erheben, um eigene Vermutungen zu überprüfen (Notwendigkeit von Daten, siehe Wild & Pfannkuch, 1999). Durch die digitale Möglichkeit, die Textlänge über die Rahmenhöhe zu messen, hilft den SuS die Hürden des händischen Messvorgangs zu überwinden. Die Erforschung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Schriftgröße und Textlänge wird dadurch erleichtert. Das Eintragen der einzelnen Wertepaare in die Tabelle fokussiert in dieser Phase schwerpunktmäßig den **Zuordnungsaspekt**.
- **Daten untersuchen:** Zum Aufbereiten der Daten werden digitale Tools (CODAP, Excel) verwendet um den Darstellungswechsel von Tabelle nach Graph problemlos (ohne Hindernisse beim Skalieren der Koordinatenachsen und ohne Übertragungsfehler) und schnell zu vollziehen. Zudem bietet das Streudiagramm auf einen Blick (**Objektaspekt**) die Möglichkeit aus der „Brille des **Kovariationsaspektes**“ auf die Funktion zu schauen (Flexible Repräsentation der relevanten Daten, siehe Wild & Pfannkuch, 1999). Für die eigentliche Anpassung der Daten durch Funktionen bietet die Schiebereglerfunktion (von CODAP) ideale Voraussetzungen (schnell und dynamisch). Der Vorteil gegenüber einer klassischen Regression (durch den Rechner ausgeführt) ermöglicht das händische Anpassen den SuS selbst in die Rolle des Anpassungsinstruments zu schlüpfen um das Optimum (je näher, desto besser) zu bestimmen. Neben den grafischen Darstellungen der drei Funktionen werden unmittelbar dynamische Funktionsterme dargestellt. Zum einen kann diese Darstellung dazu anregen die Bedeutung der verschiedenen Parameter der Funktionsterme (Lineare Funktion: Steigung und y-Achse; Quadratische Funktion: $ax^2 + b \cdot x + c$) im Verlauf des Graphen zu interpretieren („Datenfit“). Zum anderen führen uns (v. a.) graphische Darstellungen und Fragestellungen zur letzten Phase der Modellierung: Wie können die verschiedenen Funktionen bezüglich ihrer Eigenschaften von

Zuordnung, Kovariation und als Ganzes im Sachkontext gedeutet werden? (“Kontextfit”)

- Austausch und Schlussfolgerung: Diese Phase des Modellierungskreislaufs bildet den Kern der Aufgabe. SuS interpretieren und validieren verschiedene Funktionsanpassungen einmal im Kontext des beobachteten Zusammenhangs (also der Daten) und einmal im Kontext der Genauigkeit (Größe der Residuen). SuS werden dazu ermutigt zu reflektieren, inwieweit der Grad der Passung der Funktion an die Daten ein Gütekriterium ist: Ist eine Parabel deswegen als Modell gut, weil Sie näher an den Datenpunkten liegt und wäre deshalb nicht sogar eine Polynomfunktion (n-1)-Grades das Optimum bei n Datenpunkte? Ist also die Nullfunktion im Residuenplot perfekt? Oder ist es besser, die einfachste Funktion zu nehmen, deren Residuenplot zufällig (ohne Trend) um die Nulllinie verteilt ist? Vielleicht ist es sinnvoll, an dieser Stelle des Modellierens den Kontext im Datenfit zu berücksichtigen, indem Wirkmechanismen (Schriftgröße → Textlänge) wieder bewusst in den Blick genommen werden bzw. das erst Vorgang des Modellierens den Modellierenden dazu angeregt Erklärungsversuche zu Ursache und Wirkung zu formulieren. Zusammengefasst lernen SuS in dieser Phase vor allem, dass mathematische Modelle (hier: Funktionen) bei der Beschreibung von Zusammenhängen in bivariaten Datensätzen nicht per se als “richtig oder falsch”, sondern vielmehr als “nützlich oder weniger nützlich” kategorisiert werden kann (vgl. Box & Draper, 1987).

Weitere Potentiale (Anschlussfähigkeit):

- Die Erforschung der Bedeutung des Parameters a im Funktionsterm $f(x)=a+x^2$ bei der Anpassung der Daten für verschiedene Textpassagen (Frage: Wie verändert sich der Parameter a bei verschiedenen langen Textpassagen)
- Die Auswirkungen von Zeilenumbrüchen führen zur Frage, welchen Einfluss die Textbreite auf die Textlänge hat. Bei gleichbleibender Schriftgröße ist offensichtlich, dass eine Verkleinerung der Textbreite eine Vergrößerung der Textlänge zur Folge hat. Der genaue Zusammenhang kann wiederum durch ein Experiment (mit der gleichen digitalen Umgebung eines Textverarbeitungsprogramms) untersucht werden. Als Diskussionsgrundlage dient zum Beispiel die Gegenüberstellung von quadratischer, antiproportionaler (Textfläche als Produkt aus Textbreite und Textlänge) und exponentieller Abnahme (Wachstumsfaktor konstant) als Funktionsmodell für die Daten.
 - Die Einbeziehung von Definitionsmenge und Wertemenge in der mathematischen Welt (= reelle Zahlenbereiche) und die Gegenüberstellung dieser Mengen in der realen Welt (diskrete Zahlen)
 - Erforschen von Extremen (sehr große/kleine Schriftgrößen/Textbreiten): Gültigkeitsbereich mathematischer Modelle

Bildungsplanbezug:

- Einfache Zusammenhänge zwischen (Zahlen [E]) und Größen (bei Alltagssituationen [E]) erkennen und beschreiben [Klasse 5/6]
- Zusammenhänge durch Tabellen, Gleichungen, Graphen oder Text darstellen [Klasse 7/8/9] und zwischen den Darstellungsformen (situationsgerecht [Klasse 7/8/9: M/E, bei G nur lineare Funktionen] wechseln [Klasse 10] → **Mit mathematischen Darstellungen umgehen** [Klasse 7/8/9]
- Einfache funktionale Zusammenhänge in verbaler, tabellarischer und graphischer Form (auch im Koordinatensystem) darstellen und zwischen den Darstellungsformen wechseln [Klasse 5/6]
- Alltagsbezogene Sachverhalte aus Darstellungen ablesen (z.B. größte und kleinste Werte, Zunehmen und Abnehmen, Zeitpunkte) [Klasse 7/8/9] → **Mit mathematischen Darstellungen umgehen/Mit Medien mathematisch arbeiten**

- bei linearen Funktionen das Änderungsverhalten im Sachzusammenhang [mithilfe der Änderungsrate: E] beschreiben.
- quadratische Zusammenhänge durch Tabellen und Gleichungen beschreiben und graphisch darstellen → **Mit mathematischen Darstellungen umgehen/Mit Medien mathematisch arbeiten** [Klasse 7/8/9]
- die Wirkung der Parameter a und [c] in der Parabelgleichung $y=a \cdot x^2+c$ auf den Graphen abbildungsgeometrisch als Streckung, [Spiegelung, Verschiebung] deuten [Klasse 7/8/9]
- Anwendungsaufgaben mithilfe quadratischer Funktionen lösen [Klasse 7/8/9: M/E] → **Probleme mathematisch lösen/Mathematisch modellieren/Mit Medien mathematisch arbeiten**
- Den dynamischen Zusammenhang zwischen Größen in einfachen Situationen anschaulich erläutern [Klasse 5/6: E]
- Funktionen als eindeutige Zuordnungen z. B. von x-Werten zu y-Werten, von nicht eindeutigen Zuordnungen unterscheiden [Klasse 7/8/9: E]
- Die Graphen der Potenzfunktionen f mit $f(x)=x^k$ ($k=-1,-2$) unter Verwendung charakteristischer Eigenschaften skizzieren [Klasse 10: E]
- Die Wirkung von Parametern in Funktionstermen von Potenz-, Funktionen auf deren Graphen abbildungsgeometrisch deuten [Klasse 10: E]

Digitale Werkzeuge:

- CODAP mit vorbereiteten Tabellen, Graphen und dem Werkzeug, drei Funktionsanpassungen (proportionale, lineare und quadratische Funktionen) durchzuführen.
- Excel ermöglicht der LK (ggf. auch den SuS) (proportionale, lineare und quadratische und weitere) Regressionen durchzuführen. Als weitere Darstellung dient der Residuenplot, der als Güte-Maßstab verwendet werden kann.

BAUSTEIN 3



Fortbildungsaktivität „Der König des Schreckens“

Der König des Schreckens

nach Hofmann & Roth, 2021



Zeichnung: Elif Özel

Im Vergnügungspark MINTasia sorgt die Achterbahn bei den Gästen für Kribbeln im Bauch. Während zu Beginn der Achterbahnfahrt der **Aufstieg** harmlos scheint, sorgt die anschließende **Schlucht** (d.h. hier geht es erst steil runter und dann gleich wieder hoch) für Herzrasen. Der Schlucht folgt ein **Looping** (der Wagen fährt eine 360-Grad-Schleife – man befindet sich an der Spitze über Kopf) – der König des Schreckens! Eine **Spirale abwärts** (keine Kopfüber-Fahrt) schließt die Runde ab, noch während der Puls der Gäste an der Decke tanzt.

Sie haben mit Ihrer Lerngruppe die Diagnoseaufgabe „Der König des Schreckens“ durchgeführt mit dem Ziel, die Vorstellungen Ihrer Schülerinnen und Schüler zum funktionalen Denken sichtbar zu machen.

Um herauszufinden, ob Alex bereits tragfähige Vorstellungen zum funktionalen Denken aufgebaut hat, analysieren Sie ihre Produkte, die im Unterricht entstanden sind.

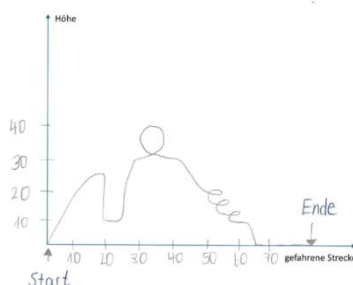


Beschreibung der Achterbahnkonstruktion
Die Achterbahn startet ...

mit einem Aufstieg in 30 m Höhe.
Anschließend folgt eine Schlucht.
Die Achterbahn fährt dabei steil
runter auf 10 m. Anschließend
fährt sie 20 m hoch.
Nach 30 m Strecke fährt sie
einen Looping auf 40 m Höhe.
Die Fahrt endet mit einer
Spirale abwärts auf 0 m. Nach
65 m Strecke endet die Fahrt.

ALEX

3. Zeichne einen Graphen, welche der gefahrenen Strecke des Wagens jeweils die Höhe des Wagens auf der Achterbahn zuordnet.



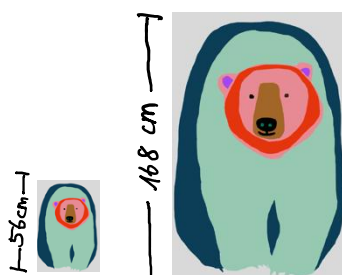
1. Liegt dem Graphen von Alex eine tragfähige Vorstellung zum funktionalen Denken zugrunde? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?
2. Wie können Sie Alex konkret dabei unterstützen, tragfähige Vorstellungen zum funktionalen Denken (weiter) aufzubauen? Formulieren Sie eine passende Anschlussaufgabe und begründen Sie Ihre Überlegungen.

Fortbildungsaktivität „Wir peppen unser Klassenzimmer auf“

Wir peppen unser Klassenzimmer auf

nach De Bock et al., 2002

Schülerinnen und Schüler der Klasse 7b möchten die Wände ihres Klassenzimmers aufpeppen. Sie haben sich entschieden, einen Bären an die Wand zu malen. Damit nichts schief geht, haben sie zuvor eine 56 cm große Skizze angefertigt. Dafür brauchten sie 80 ml Farbe. Da ihnen die Skizze gefällt, sind sie bereit, eine vergrößerte Version der Skizze an die Wand zu malen. Das Wandbild soll 168 cm hoch sein.



Sie haben mit Ihrer Lerngruppe die Aufgabe „Wir peppen unser Klassenzimmer auf“ durchgeführt mit dem Ziel, die Vorstellungen Ihrer Schülerinnen und Schüler zum funktionalen Denken sichtbar zu machen.

Um herauszufinden, ob Bente bereits tragfähige Vorstellungen zum funktionalen Denken aufgebaut hat, analysieren Sie sein Produkt, das im Unterricht entstanden ist.



BENTE

Arbeitsauftrag

Wie viel Liter Farbe werden die Schülerinnen und Schüler der Klasse 7b für das Wandbild ungefähr brauchen? Begründe deine Antwort.

$$56 \text{ cm} \cdot 3 = 168 \text{ cm}$$

$$80 \text{ ml} \cdot 3 = 240 \text{ ml}$$

Die Schülerinnen und Schüler brauchen 240 ml Farbe. Da das Wandbild dreimal so groß ist als die Skizze, braucht es auch dreimal so viel Farbe als die Skizze.

Zeichnungen: Elif Özel

1. Liegt der Begründung von Bente eine tragfähige Vorstellung zum funktionalen Denken zugrunde? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?
2. Wie können Sie Bente konkret dabei unterstützen, tragfähige Vorstellungen zum funktionalen Denken (weiter) aufzubauen? Formulieren Sie eine passende Anschlussaufgabe und begründen Sie Ihre Überlegungen. Selbstlernkurs Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Fortbildungsaktivität „Der Flohmarkt“

Der Flohmarkt

(Kempen & Zindel, 2022)

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Von vorherigen Flohmärkten weiß er schon: Die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = 0,5x + 2,5$ ordnet jedem Gewinn die Anzahl der Bücher zu, die er dafür verkaufen müsste.

Sie haben mit Ihrer Lerngruppe die oben aufgeführte Aufgabe durchgeführt mit dem Ziel, die Vorstellungen Ihrer Schülerinnen und Schüler zum funktionalen Denken sichtbar zu machen.

Um herauszufinden, ob Bente bereits tragfähige Vorstellungen zum funktionalen Denken aufgebaut hat, analysieren Sie ihr Produkt, das im Unterricht entstanden ist.



NOAH

1. Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15 € zu erzielen? Schreibe deine Rechnung auf und begründe sie.

$$15 = 0,5 \cdot x + 2,5 \quad | -2,5$$

↑ ↑

Gewinn Anzahl Bücher

$$12,5 = 0,5 \cdot x \quad | \cdot 2$$

$$25 = x$$

Max muss 25 Bücher verkaufen, um einen Gewinn von 15 € zu erzielen. Der Gewinn hängt ab von der Anzahl der verkauften Bücher.

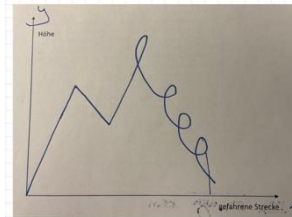
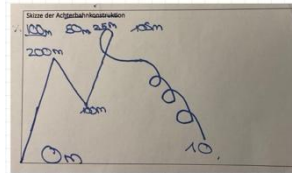
1. Liegt der Begründung von Noah eine tragfähige Vorstellung zum funktionalen Denken zugrunde? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?
2. Wie können Sie Noah konkret dabei unterstützen, tragfähige Vorstellungen zum funktionalen Denken (weiter) aufzubauen? Formulieren Sie eine passende Anschlussaufgabe und begründen Sie Ihre Überlegungen.

Lernschritte beim Umgang mit Funktionen

Hofmann & Roth, 2021

Lernschritte bei der Entwicklung funktionalen Denkens	Erklärung: Was müssen SuS können / verstanden haben?	Typische Fehler in diesen Schritten	Wie arbeite ich weiter, nachdem ich den Fehler identifiziert hat?
Eindeutige Zuordnung erfassen	Graph als funktionaler Zusammenhang, bei dem jedem Wert der ersten Größe auf der x-Achse (unabhängige Variable) ein Wert der zweiten Größe auf der y-Achse (abhängige Variable) zugeordnet wird.	<p>Missachtung der Eindeutigkeit:</p> <p>1) Graph-als-Bild-Fehler (nach Vogel, 2006): Oberflächenmerkmale eines Funktionsgraphen und einer Situation werden fälschlicherweise aufeinander übertragen. Der Funktionsgraph wird als das photographische Abbild von Realsituationen verstanden, nicht als die Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs / bestehender Abhängigkeiten (Ostermann et al., 2015), bei dem einer Größe (auf der x-Achse → unabhängige Größe) eine andere Größe (auf der y-Achse → abhängige Größe) zugeordnet wird.</p> <p>Aufgabenbeispiel „Der König des Schreckens“: Looping bei der Achterbahnfahrt</p> <div data-bbox="842 890 1375 1102" data-label="Image"> <p>Der König des Schreckens</p> <p>Im Vergnügungspark X sorgt die Achterbahn bei den Gästen für Kribbeln im Bauch. Während zu Beginn der Achterbahnfahrt der Aufstieg harmlos scheint, sorgt die anschließende Schlucht (d.h. hier geht es erst steil runter und dann gleich wieder hoch) für Herzerzen. Der Schlucht folgt ein Looping (der Wagen fährt eine 360-Grad-Schleife - man befindet sich an der Spitze über Kopf) – der König des Schreckens! Eine Spirale abwärts (keine Kopfüber-Fahrt) schließt die Runde ab, noch während der Puls der Gäste an der Decke tanzt.</p> </div> <p><i>Wagen kann sich nach einer bestimmten gefahrenen Strecke nicht gleichzeitig auf verschiedenen Höhen befinden.</i></p>	<p>Diese zentrale Eigenschaft von Funktionen (Eindeutigkeit der Zuordnung) regelmäßig im Unterricht thematisieren und in konkreten Situationen verdeutlichen (z. B. Beispiel Looping) → Rückbezug auf zugrunde liegende Situation unterstützt die Ausbildung geeigneter Vorstellungen</p> <p>Experimente entschleunigen SuS gehen in die Zuordnungsrolle ein: Daten sammeln. z. B. ein Zeitpunkt, eine Temperatur, ein Streckenpunkt, eine Höhe ...</p>

Schülerbearbeitung:




Beschreibung der Achterbahnkonstruktion
Die Achterbahn startet ...

mit einem Aufstieg in 30 m Höhe.
Anschließend folgt eine Schlucht.
Die Achterbahn fährt dabei zig
mal unter auf 20 m anschließend
fährt sie 20 m hoch.
Nach 30 m Strecke fährt sie
einen Looping auf 10 m Höhe.
Die Fahrt endet mit einer
spirale abwärts auf 0 m. Nach
65 m Strecke endet die Fahrt.

ALEX

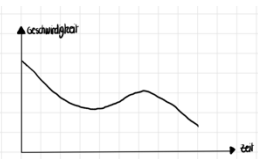
3. Zeichne einen Graphen, welche der gefahrenen Strecke des Wagens jeweils die Höhe des Wagens auf der Achterbahn zuordnet.



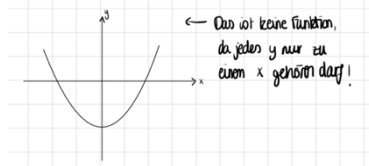
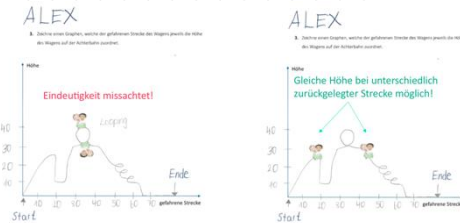
Ein Skifahrer fährt, wie im Bild dargestellt, eine Piste hinunter. 

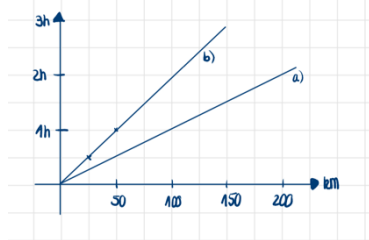
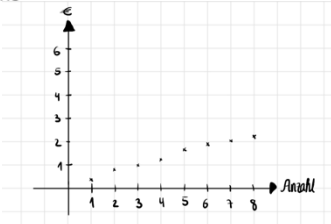


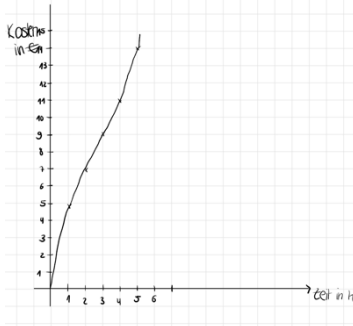
Wie sieht das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zu der gegebenen Situation aus? Wähle aus.

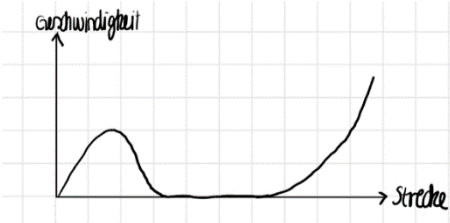
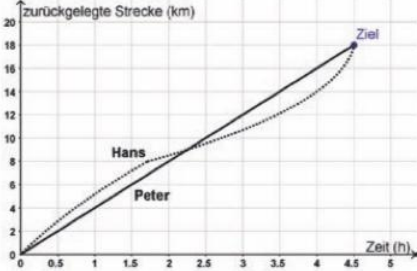


- ➔ SuS können nicht hinreichend zwischen Situation und graphischer Darstellung differenzieren
- ➔ Situation-zu-Bild-Übersetzung gelingt nicht (Hußmann & Laakmann, 2011, S. 5).
- ➔ Einer der verbreitetsten Fehler im Bereich der graphischen Interpretation (Nitsch, 2015, S. 143).
- ➔ Zeigt auf, dass die Grundvorstellungen nach Vollrath (Eindeutigkeit einer Zuordnung, Kovariation (Änderungsverhalten / Abhängigkeit von Größen), Funktion als Ganzes (Objektaspekt / Erfassen der Gesamtsituation) nicht abgerufen werden können.

		<p>2) Einem x-Wert werden mehrere y-Werte zugeordnet</p> <p>→ Siehe Looping</p> <p>→ Zeigt auf, dass die Grundvorstellung Eindeutigkeit einer Zuordnung nach Vollrath (1989) nicht abgerufen werden kann.</p> <p>3) Übergeneralisierung der Eindeutigkeit / von eindeutiger Zuordnung auf die Injektivität schließen</p> <p>„Jedem x wird genau ein y zugeordnet“ wird fälschlich interpretiert als „dann darf auch jedes y nur einmal vorkommen.“</p> <p>Handelt es sich bei dem gezeichneten Graphen um einen Funktionsgraphen?</p>  <p>ALEX</p> <p>8. Zeichne einen Graphen, welcher den gegebenen Strecke den Höhen gemäß der Höhe des Berges auf den Gipfel führt.</p> 	
<p>Verstehen der funktionalen Abhängigkeit / Abhängige und unabhängige Größe erfassen</p>	<p>Bei Funktionen geht es um gerichtete Zusammenhänge. Ein zentraler Lernschritt ist die Unterscheidung der unabhängigen und abhängigen Größe. Welche Größe variiert und welche Größe ergibt sich</p>	<p>4) Die abhängige und unabhängige Größe werden vertauscht.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Genaues Lesen der Aufgabenstellung einfordern und einüben. - Schlüsselwörter markieren. - Situationen thematisieren, die sich nicht

	aus dem funktionalen Zusammenhang?	<p>5) X- und y- Koordinate werden beim Eintragen von Zahlenpaaren in ein Koordinatensystem vertauscht.</p> <p>Sven betrachtet die Durchschnittsgeschwindigkeit zweier Boote.</p> <p>a. Je Stunde können mit dem Boot Ahoi bis zu 100km gefahren werden.</p> <p>b. In einer halben Stunde legt das Boot Poseidon bis zu 25km zurück.</p> <p>Zeichne Graphen zu den beiden gegebenen funktionalen Zusammenhängen.</p>  <p>Z. B.: Erstelle zur Tabelle einen Funktionsgraphen.</p>	umkehren lassen bzw. deren Umkehrung keine Funktion ergibt (etwa durch den Verlust der Eindeutigkeit).
Koordinatensystem erstellen	<p>Die Fähigkeit zum Darstellungswechsel zwischen der Situation und der mathematischen Darstellung (z. B. Funktionsgraph) entwickeln.</p> <p>Achsen müssen nicht identisch skaliert sein.</p>	<p>6) Achsen skalieren (SuS nehmen an, dass die Achsen identisch sein müssen).</p> <p>Ein Bonbon kostet 30Cent. Zeichne zu dem funktionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bonbons und dem zu zahlenden Preis einen Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem.</p> 	
Bezug zur Situation herstellen	Darstellungswechsel zwischen Situation und einer mathematischen Darstellung (z. B. Funktionsgraphen) wechseln.	<p>7) Übergeneralisierung / Illusion der Linearität (De Bock et al., 2007) / Proportionalität: alle Zusammenhänge sind linear oder proportional</p>	Zu intensive einseitige Auseinandersetzung mit linearen und proportionalen Zusammenhängen zu Beginn der Einheit kann zur

	<p>Situation muss erst erfasst und anschließend (graphisch) modelliert werden → fehleranfällig.</p> <p>Dürfen die eingezeichneten Punkte miteinander verbunden werden? Graphen sind unendliche Punktmengen.</p>	<p>Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Quadrats, wenn man die Seitenlänge des Quadrats verdoppelt?</p> <p><i>Die Fläche verdoppelt sich.</i></p> <p>8) Punkte verbinden? In einem Park werden Fahrräder vermietet. Die erste Stunde kostet 5 Euro und jede weitere angefangene Stunde kostet zusätzlich 2 Euro. Zeichne einen Graphen zu der gegebenen Situation! (Durchgezogene Linie würde einen kontinuierlichen Preisanstieg bedeuten und keine stundenweise Berechnung)</p> <p>Wie viel müsste man denn zwischen den ganzen Stunden bezahlen (Preisgleichheit)? Es braucht einen Treppengraphen.</p> 	<p>Illusion der Linearität führen.</p> <p>Im Unterricht auch untypische funktionale Zusammenhänge sowie deren Funktionsgraphen behandeln und die Vereinbarkeit der verinnerlichten Definition mit dem neuen Graphentyp erfahrbar machen.</p>
--	---	---	--

		<p>9) Keine Änderung entspricht dem Funktionswert 0 / Konstante Graphenabschnitte (parallel zur x-Achse) werden falsch interpretiert?</p> <p>Aufgabenbeispiel: Ein Radfahrer fährt nach dem Start einen Berg hinauf. Oben angekommen fährt er eine Zeit lang mit konstanter Geschwindigkeit, bevor er wieder den Berg hinuntergeht. Zeichne einen Graphen, welcher die Geschwindigkeit des Radfahrers über die gefahrene Strecke darstellt.</p> 	
Bestand und Änderung unterscheiden	<p>Lernen, den Bestand (y-Werte im Bereich) von der Änderung zu unterscheiden.</p>	<p>Slope / height confusion (McDermott et al., 1987, S. 504): SuS vermischen die Steigung eines Graphen an einer Stelle mit dem Funktionswert an dieser Stelle. Es gelingt ihnen nicht, die Änderungsrate vom aktuellen Bestand einer Größe zu unterscheiden.</p> <p>Aufgabenbeispiel: Welche der beiden Wanderer ist in der letzten halben Stunde schneller gelaufen?</p>  <p>„Peter, denn seine Linie ist höher.“ „Peter war schneller, weil er sein Tempo gehalten hat.“</p>	

Literatur

- De Bock, D., van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The Illusion of Linearity. From Analysis to Improvement*. Springer.
- Hofmann, R. & Roth, J. (2021). Lernfortschritte identifizieren. Typische Fehler im Umgang mit Funktionen. *Mathematik lehren*, 226, 15–19.
- Hußmann, S., & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule*, 53(38), 2–13.
- McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Example from kinematics. *American Journal of Physics*, 55(6), 503–513.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Springer Spektrum.
- Ostermann, A., Leuders, T., & Nückles, M. (2015). Wissen, was Schülerinnen und Schülern schwer fällt. Welche Faktoren beeinflussen die Schwierigkeitseinschätzung von Mathematikaufgaben? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 36(1), 45–76.
- Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimedibasierter Supplantation*. Franzbecker.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37.

Weitere Diagnoseinstrumente

CODI - COncceptual DIfficulties in the field of functional relationships

Lernstufen: 9 und 10

CODI ist ein Diagnoseinstrument (vgl. Nitsch, 2015), das **typische Fehler bei Darstellungswechseln zu linearen und quadratischen Funktionen** erfasst. Dabei wurden a) der graphisch-algebraische, b) der situativ-algebraische und c) der graphisch-situative Darstellungswechsel einbezogen.

Der Lernfortschritt wird durch Messwiederholung erfasst. Hierzu wird ein persönlicher Code vergeben.

Anwendung:

- 1) Auf den Link klicken: <http://codi-test.de/>
- 2) Zugangsschlüssel für die Klasse generieren. Beim Einloggen in den Test wird dieser Code von allen SuS eingetippt. Die Lehrkraft hat zudem die Möglichkeit, mit diesem Code die Klassenergebnisse abzurufen.
- 3) Nachdem sich die SuS mit diesem Code einschreiben, werden sie nochmals gebeten, einen persönlichen Code zu generieren. Wird der Test zu einem späteren Zeitpunkt wiederholt, können die Testergebnisse durch den persönlichen Code miteinander verglichen werden.
- 4) Durch einen Klick können die Daten der SuS gelöscht werden. Es ist kein Rückschluss auf persönliche Daten möglich.

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Springer Spektrum.

FALKE - Funktionales Denken und Analysis – Lernen von Konzepten in der Einführungsphase

FALKE-T1: Test zum Ende der Sekundarstufe I

Die Testkonzeption (vgl. Klinger, 2018) der FALKE-Tests berücksichtigt **Grundvorstellungen funktionaler Zusammenhänge** (Zuordnungsvorstellung, Kovariationsvorstellung, sowie Objektvorstellung), sowie entsprechende **Grundvorstellungen der Ableitungsfunktion** (Änderungsratenvorstellung, Tangentensteigungsvorstellung, sowie Lokale-Linearisierungsvorstellung). Zudem wird die **Funktionsebene** (übliche Funktionsebene, Ebene der manipulierten Funktion, sowie Ebene der differenzierten Funktion) und die **Darstellungsform** (situativ-sprachliche, graphisch-visuelle, formal-symbolische, sowie numerisch-tabellarische Darstellungsform) einbezogen.

Anwendung:

Auf <https://www.falke-test.de/> stehen Testhefte (in A- und B-Fassung) im Downloadbereich zur Verfügung. Zudem kann der „FALKE-T1: Test zum Ende der Sekundarstufe I“ in Moodle importiert werden. Die Tests als Gesamtwerk sind [CC BY-NC-SA 4.0](#) lizenziert.

Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe*. Springer Spektrum.

SMART - Specific Mathematics Assessments that Reveal Thinking

Lernstufen: 5 bis 9

Bei den SMART-Tests handelt es sich um 5- bis 15-minütigen Online-Tests, mit denen das konzeptuelle Verständnis von SuS diagnostiziert werden kann. Die Tests werden derzeit vom Deutschen Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik (DZLM) ins Deutsche übersetzt. Eine Übersicht der in deutscher Sprache verfügbaren Tests findet sich auf <https://smart.dzlm.de/>.

Anwendung:

- 1) Registrierung als Lehrkraft auf <https://smartvic.com/smart/index.htm>.
- 2) Für die SuS kann ein Code generiert werden, der von den SuS eingetippt wird. SuS können ihre Namen nach Anleitung codieren.

LITERATUR



Materialpaket

- Box, G. E., & Draper, N. R. (1987). *Empirical model-building and response surfaces*. Wiley.
- Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005). Der „Funktionenführerschein“ – Wie Schülerinnen und Schüler das „Denken in Funktionen“ wiederholen und festigen können. *Praxis der Mathematik*, (2), 20–25.
- De Bock, D., van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The Illusion of Linearity. From Analysis to Improvement*. Springer.
- De Bock, D., van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An indepth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational studies in mathematics*, 50(3), 311–334.
- Hofmann, R., & Roth, J. (2021). Arbeiten mit Funktionsgraphen – Zur Diagnose von Fehlern und Fehlvorstellungen beim Funktionalen Denken. *Mathematica didactica*, 44(1), 1–17.
- Hofmann, R. & Roth, J. (2021). Lernfortschritte identifizieren. Typische Fehler im Umgang mit Funktionen. *Mathematik lehren*, 226, 15–19.
- Hußmann, S., & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule*, 53(38), 2–13.
- Jahnke, H. N., & Wambach, R. (2013). Interpretation von Formeln mit Hilfe des Funktionsbegriffs. In G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (63–78). Springer.
- Kempen, L. & Zindel, C. (2022). Fortbildungsbaustein „Funktionale Zusammenhänge verstehen“ des DZLM-Fortbildungsmoduls Diagnose und Förderung von Verstehensgrundlagen. Open Educational Resource, abrufbar unter <https://maco.dzlm.de/?q=verstehensgrundlagen-zu-funktionen-0>
- Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe*. Springer Spektrum.
- Loibl, K., Leuders, T., & Dörfler, T. (2020). A framework for Explaining Teachers' Diagnostic Judgements by Cognitive Modeling (DiaCoM). *Teaching and Teacher Education*, 91. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103059>
- McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Example from kinematics. *American Journal of Physics*, 55(6), 503–513.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Springer Spektrum.
- Ostermann, A., Leuders, T., & Nückles, M. (2015). Wissen, was Schülerinnen und Schülern schwer fällt. Welche Faktoren beeinflussen die Schwierigkeitseinschätzung von Mathematikaufgaben? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 36(1), 45–76.
- Ovid, M. (2021). *Metamorphosen* (M. von Albrecht, Übers.). Reclam.
- Prediger, S., & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich?. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule*, 51(27), 1–8.
- Schreiter, S., & Vogel, M. (2021). Funktionale Zusammenhänge in „(Kon-)Texten“ erschließen. *Mathematik lehren*, 226, 25–31.
- Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimedialbasierter Supplantation*. Franzbecker.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37.
- Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International statistical review*, 67(3), 223–248.



lernen:digital
Kompetenzzentrum
MINT

Erschienen im

Kompetenzverbund lernen:digital
Marlene-Dietrich-Allee 16, 14482 Potsdam
Tel: 0331-977-256362
E-Mail: geschaeftsstelle@lernen.digital

Projektverbund

Kompetenzverbund lernen:digital,
Kompetenzzentrum MINT,
MINT-ProNeD

Datum der Erstveröffentlichung

31.10.2025

Autor:innen

Florian, Bogda, Elif Özel,
Prof. Dr. Markus Vogel, Prof. Dr. Marita Friesen

Redaktion

Johanna Ruge, Jennifer Bürk

Zitierhinweis

Bogda, F., Özel, E., Vogel, M. & Friesen, M. (2025).
"Funktionaler Zusammenhang" – ein
Fortbildungsmodul für die Sekundarstufe I.
<https://hse-heidelberg.de/funktionaler-zusammenhang-fobi>

Die vorliegende Veröffentlichung ist im Rahmen des Projektverbunds MINT-ProNeD für das Kompetenzzentrum MINT im Kompetenzverbund lernen:digital entstanden.

Finanziert durch die Europäische Union – NextGenerationEU und gefördert durch das Bundesministerium für Bildung, Familie, Senioren, Frauen und Jugend (BMBFSFJ). Die geäußerten Ansichten und Meinungen sind ausschließlich die des Autors/der Autorin und spiegeln nicht unbedingt die Ansichten der Europäischen Union, Europäischen Kommission oder des Bundesministeriums für Bildung, Familie, Senioren, Frauen und Jugend wider. Weder Europäische Union, Europäische Kommission noch das Bundesministerium für Bildung, Familie, Senioren, Frauen und Jugend können für sie verantwortlich gemacht werden.



Dieses Produkt ist unter der Lizenz [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) veröffentlicht. Ausgenommene Inhalte sind an den einzelnen Inhalten angegeben. Die Urheber:innen sollen bei der Weiterverwendung wie folgt angegeben werden: Özel, E., Bogda, F., Friesen, M., Vogel, M., Kompetenzverbund lernen:digital, entstanden im Projektverbund MINT-ProNeD.